Μάθημα 3ο:

Παρασκευή 03/04/20

Ερώτημα:

Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ΑΟΕΔ εκτιμήτη μιας παραμέτρου ή μιας συνάρτησης της παραμέτρου με την βοήθεια ενός τ.δ που είναι διαθέσιμο από μια κατανομή που εκφράζεται μέσω της παραμέτρου;

Υπάρχουν δύο μέθοδοι:

1η: → Ανισότητα Cramer-Rao (~1940)

2η: → Βασίζεται σε μια κατηγορία σ.σ που ικανοποιούν τις ιδιότητες της επάρκειας και της πληρότητας

1) Η ανισότητα Cramer-Rao αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Cramer κ Rao. Είναι μια θεωρητική ανισότητα που μας δίνει ένα κάτω φράγμα για τη διακύμανση ενός εκτιμήτη και χρησιμοποιείται για την εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητών.

Συνθήκες κανονικότητας:

Εστω τ.δ $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$

Εστω $f(\underset{\sim}{x},\theta)$ η από κοινού κατανομή των $(X_1,\dots,X_n)$

Επειδή X_i, $i=1,\dots,n$ ανεξάρτητες και ισόνομες έχουμε

$$f(\underset{\sim}{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta), \quad \theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$$

Οι συνθήκες κανονικότητας είναι:

I1: Το Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

I2: Το σύνολο $S_n=\{\underset{\sim}{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : f(\underset{\sim}{x},\theta)>0\}$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο θ.

I3: Για κάθε $x\in S_n$ και $\theta\in\Theta$ υπάρχει και είναι πεπ/νη η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)$

I_4: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x}$ $(=0)$ $\forall\,\theta\in H$.

I_5: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x})\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x}) f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x}$ $\forall\,\theta\in H$

όπου $T(\underset{\sim}{x})$ σ.σ.

I_6: $0 < I_{\underset{\sim}{x}}(\theta) < \infty$ $\forall\,\theta\in H$

όπου $\displaystyle I_{\underset{\sim}{x}}(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)^2$.

Θεώρημα (Ανισότητα Cramer-Rao):

Έστω ότι ισχύουν οι ασθενικές κανονικότητας $(I_1 - I_6)$

Αν $T(\underset{\sim}{x})$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ τότε

$$\boxed{\frac{g'(\theta)^2}{I_{\underset{\sim}{x}}(\theta)} \le Var(T(\underset{\sim}{x})), \quad \theta\in H.}$$

Απόδειξη:

Είναι $\displaystyle E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right) f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x} =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(\underset{\sim}{x},\theta)}{f(\underset{\sim}{x},\theta)}\cdot f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}(1) = 0. \quad (1)$$

Scanned with CamScanner

$$Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)=E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2-\left[E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)\right]^2$$

$$=E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2=I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) \quad (2)$$

Αλλά

$$Cov\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta), T(\underset{\sim}{X})\right)=$$

$$=E_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)\cdot T(\underset{\sim}{X})\right]-E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right]\cdot E_\theta(T(\underset{\sim}{X})) \overset{(1)}{=}$$

$$=E_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)T(\underset{\sim}{X})\right]=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\,T(\underset{\sim}{x})\,f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}T(\underset{\sim}{x})\frac{\partial}{\partial\theta}f(\underset{\sim}{x},\theta)\,d\underset{\sim}{x}\overset{(I_5)}{=}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n}T(\underset{\sim}{x})\,f(\underset{\sim}{x},\theta)\cdot d\underset{\sim}{x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(T(\underset{\sim}{X}))=\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)=g'(\theta).$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:
$Cov^2(Y,Z)\leq Var(Y)\cdot Var(Z)$

$$[g'(\theta)]^2=Cov\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta), T(\underset{\sim}{X})\right)^2\leq Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)\cdot Var\left[T(\underset{\sim}{X})\right]$$

Από (2) προκύπτει

$$[g'(\theta)]^2\leq I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)\cdot Var(T(\underset{\sim}{X})) \Rightarrow$$

$$Var(T(\underset{\sim}{X}))\geq\frac{[g'(\theta)]^2}{I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)}$$

∎

Η αναμενόμενη τιμή $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$ είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως μέτρο πληροφορίας του Fisher

Μέτρο Πληροφορίας Fisher:

Έστω τ.δ $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ με από κοινού σ.π.π $f(\underset{\sim}{x},\theta)$ στη συνεχή περίπτωση ή από κοινού σ.π $p(\underset{\sim}{x},\theta)$ στην διακριτή περίπτωση για $\theta\in \Theta \subseteq \mathbb{R}$.

Το μέτρο πληροφορίας του Fisher που αναφέρεται στο τ.δ $\underset{\sim}{X}$ συμβολίζεται με $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$ και ορίζεται

• Συνεχή περίπτωση:

$$I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2=\int_{\mathbb{R}^n} f(\underset{\sim}{x},\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)^2 d\underset{\sim}{x}$$

• Διακριτή περίπτωση:

$$I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2=\sum_{\underset{\sim}{x}} p(\underset{\sim}{x},\theta)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right]^2$$

Παρατηρήσεις:

α) Το $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$ το συναντάκουμε και ως $I^{f}_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$

Ικανοποιεί σημαντικές ιδιότητες από τις οποίες δικαιολογείται η ερμηνεία του $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$ ως ένα μέτρο που ποσοτικοποιεί και εκφράζει το ποσό της πληροφορίας που περιέχεται στο $\underset{\sim}{X}$ σχετικά με τη θ.

β) Ο ορισμός γενικεύεται στην περίπτωση m-διάστασης παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}\in\Theta\subseteq\mathbb{R}^m$.

Τότε το $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$ είναι ένας συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος $m\times m$ πίνακας και το στοιχείο της (i,j) θέσης $i,j=1,\dots,m$ ορίζεται να είναι

$$I_{ij}(\underset{\sim}{\theta}) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{\theta}) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{\theta})\right] =$$

$$= \int f(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\theta})\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\theta})\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\theta})\right)d\underset{\sim}{x}.$$

Ανάλογα και για τη διακριτή περίπτωση.

Ο πίνακας $I_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{\theta})$ με στοιχεία $I_{ij}(\underset{\sim}{\theta})$ $i,j=1,\dots m$ $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ ονομάζεται πίνακας πληροφορίας του fisher.

Πρόταση:

α) Αν οι συνιστώσες X_i, $i=1,\dots n$ του τ.δ $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots X_n)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και κάθε μια ακολουθεί κατανομή με σ.π.π. $f(\underset{\sim}{x},\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ τότε υπο συνθήκες κανονικότητας.

$$\boxed{I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) = n I_X(\theta). \quad , \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}}$$

όπου $I_X(\theta)$ το μετρο πληροφορίας του Fisher που στηρίζεται στην $f(\underset{\sim}{x},\theta)$ και είναι

$$I_X(\theta) = \int f(x,\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right)^2 dx \quad , \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}.$$ ανάλογα για τη διακριτή.

β) Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικότητας τότε το μέτρο πληροφορίας του fisher δίνεται από τη σχέση

$$I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right) = -\int f(x,\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right)dx.$$

Απόδειξη:

α) Επειδή X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $f(x,\theta)$ η από κοινού κατανομή $f(\underset{\sim}{x},\theta)$ γίνεται

$$f(\underset{\sim}{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x,\theta)=f^n(x,\theta)\ ,\theta\in \Theta\subseteq \mathbb{R}$$

Άρα $I_{\underset{\sim}{x}}(\theta)=\int f(\underset{\sim}{x},\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)^2 d\underset{\sim}{x}=$

$$=E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)^2=Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)+\left[E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)\right]^2 \quad (1)$$

Αλλά $E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)=0$ από αποδ. ανισ. Cramer-Rao

Άρα από την (1) έχουμε

$$\cancel{E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\right.}\ I_{\underset{\sim}{x}}(\theta)=Var.\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta)\right)=$$

$$=Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\right)=Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i,\theta)\right)$$

$$=Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right)\xrightarrow{X_i\ \text{ανεξ.}}$$

$$I_{\underset{\sim}{x}}(\theta)=\sum_{i=1}^{n}Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log.f(x_i,\theta)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right)^2-\left[E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right)\right]^2\right\}.$$

όμως $E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right)=0$ λόγω συνθηκών κανονικότητας και λόγω του ότι X_i είναι ισόνομες

$$I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_i,\theta)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} I_X(\theta) = n\, I_X(\theta), \quad \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

(β)

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)\right) =$$

$$E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{X},\theta)}{f(\underset{\sim}{X},\theta)}\right)\right) = E\left[\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(\underset{\sim}{X},\theta)\right) f(\underset{\sim}{X},\theta) - \left(\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)}{f^2(\underset{\sim}{X},\theta)}\right]$$

$$= E\left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(\underset{\sim}{X},\theta)}{f(\underset{\sim}{X},\theta)}\right) - E\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(\underset{\sim}{X},\theta)}{f(\underset{\sim}{X},\theta)}\right)^2 =$$

$$= \int\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(\underset{\sim}{x},\theta)}{f(\underset{\sim}{x},\theta)} f(\underset{\sim}{x},\theta)\, d\underset{\sim}{x} - E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2$$

$$= \underbrace{\int \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(\underset{\sim}{x},\theta)\, d\underset{\sim}{x}}_{=0} - E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right)^2 = -I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) \quad \blacksquare$$

Παρατηρήσεις:

- Το (α) διατυπώνει την ανισότητα Cramer-Rao σε απλούστερη μορφή

$$Var(T(\underset{\sim}{X})) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)} = \frac{[g'(\theta)]^2}{n\, I_X(\theta)}$$

• Το (β) εκφράζει με απλή μια έκφραση το μέτρο πληροφορίας του Fisher

Ανισότητα Cramer-Rao για εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητών.

I) Υπολογίζεται αρχικά το κάτω φράγμα που διατυπώνεται στην ανισότητα Cramer-Rao:

$$K\Phi_{C-R} = \frac{[g'(\theta)]^2}{n I_X(\theta)},$$

με $I_X(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)\right)$

II) Προσπαθούμε να βρούμε έναν αμερόληπτο εκτιμητή $T = T(\underline{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ της $g(\theta)$ του οποίου η διακύμανση ταυτίζεται με το $K\Phi_{C-R}$.
Αν βρεθεί ένας τέτοιος εκτιμητής T, τότε αυτός είναι αμερόληπτος με την μικρότερη διακύμανση από όλους τους άλλους αμερόληπτους εκτιμητές της $g(\theta)$.

Παράδειγμα (Κατανομή Poisson)

Έστω τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή Poisson(θ) και σ.π.

$$p(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad \theta>0 \text{ και } x = 0, 1, \dots$$

Να κατασκευαστεί ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του ρυθμού της διαδικασίας Poisson(θ)

Είναι $g(\theta) = \theta$ άρα $[g'(\theta)]^2 = 1$.

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)\right)$$

Είναι $\log p(x,\theta) = -\theta + x\log\theta - \log x!$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta) = -1+\frac{x}{\theta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta) = \frac{-x}{\theta^2}.$$

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta)\right) = -E\left(\frac{-x}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}E(X) = \frac{1}{\theta^2}\cdot\theta = \frac{1}{\theta}.$$

$$K\Phi_{C-R} = \frac{1}{n\cdot(1/\theta)} = \frac{\theta}{n}$$ Αρκεί να βρεθεί εκτιμητής T της θ με $E(T)=\theta$ και $Var(T) = \frac{\theta}{n}$

Θεωρούμε τον εκτιμητή $T=\bar{X}$

$E(T) = E(\bar{X}) = \theta$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{\theta}{n}$$

Αρα ο $\bar{X}$ ειναι αμερόληπτος της θ και $Var(\bar{X}) = K\Phi_{C-R} \Rightarrow$

$\bar{X}$ ΑΟΕΔ εκτιμητης της θ $\blacktriangle$

Παραδειγμα: [Κατανομη Bernoulli]

Εστω τ.δ $X_1,\dots,X_n$ από κατανομη Bernoulli με σ.π

$p(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$, $0<\theta<1$ δηλαδη $B(n=1, p=\theta)$

Να προσδιορισθεί ΑΟΕΔ εκτιμητης της πιθανότητας επιτυχίας θ

$g(\theta)=\theta \Rightarrow [g'(\theta)]^2 = 1$

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta)\right)$$

$\log p(x,\theta) = x\log\theta + (1-x)\log(1-\theta)$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{(1-x)}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta) = -\frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}.$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(X,\theta)\right) = -\frac{1}{\theta^2}E(X) - \frac{1}{(1-\theta)^2}E(1-X) =$$

$$= -\frac{1}{\theta^2}\cdot\theta - \frac{1}{(1-\theta)^2}(1-\theta) = -\frac{1}{\theta} - \frac{1}{(1-\theta)} = -\frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$I_X(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$ και $K\Phi_{C-R} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

Εστω $T = \bar{X}$

$E(T) = E(\bar{X}) = \theta$, $Var(\bar{X}) = \frac{\Delta\iota\alpha\kappa\cdot\pi\lambda\eta\theta}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$

Αρα ο $\bar{X}$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της πιθ. επιτυχίας θ.

Παρατήρηση:
Η Ανισότητα Cramer-Rao αποδεικνύεται - ισχύει - εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικότητας. Σύμφωνα με τους Hodges-Lehmann οι συνθήκες κανονικότητας ικανοποιούνται για ορισμένες γνωστές κατανομές (Poisson, κανονική, διωνυμική & εκθετική και για κάθε αμερ. εκτιμητή)
Δηλαδή ικανοποιούνται για μια ευρεία οικογένεια κατανομών την εκθετική οικογένεια κατανομών.

Τρόπος εύρεσης αμερόληπτου εκτιμητή:

Αν η προς εκτίμηση συνάρτηση της παραμέτρου θ είναι κατά, σχετίζεται με τη μέση τιμή του πληθυσμού, τότε δοκιμάζουμε τον $\bar{X}$ αφού εκτιμά αμερόληπτα τη μέση τιμή κάθε κατανομής κάθε πληθυσμού. Ανάλογα αν η προς εκτίμηση συνάρτηση $g(\theta)$ είναι κοντά με τη διακύμανση του πληθυσμού τότε δοκιμάζουμε της S^2.

Πόρισμα:

Έστω οι συνθήκες κανονικότητας ισχύουν για τον αμερόληπτο εκτιμητή $U = U(\underset{\sim}{X})$ της $g(\theta)$. Τότε:

$$Var(U(\underset{\sim}{X})) = k.\phi_{C-R} = \frac{[g'(\theta)]^2}{n I_X(\theta)} \quad \text{εαν-ν} \quad U(\underset{\sim}{X}) = g(\theta) + a(\theta)\cdot W$$

για $\theta \in \Theta$ και $W = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x_i, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\underset{\sim}{X}, \theta)$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω $U = g(\theta) + a(\theta)\cdot W$

Επειδή ~~[illegible]~~ U, W συνδέονται γραμμικά $\Rightarrow \rho(U, W) = \pm 1$

$\Rightarrow \rho^2(U, W) = 1$

$$Cov_\theta^2(U, W) = Var_\theta(U)\cdot Var_\theta(W)$$

Από την απόδειξη Cramer-Rao:

$$Cov_\theta(U, W) = Cov\left(U(\underset{\sim}{X}), \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\underset{\sim}{X}, \theta)\right) = g'(\theta)$$

Άρα $Var_\theta(U(\underset{\sim}{X})) = \frac{[g'(\theta)]^2}{Var_\theta(W)} = \frac{[g'(\theta)]^2}{I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)} = \frac{[g'(\theta)]^2}{n I_X(\theta)}$

($\Rightarrow$) Αποδεικνύεται ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία.

Παρατήρηση

Στην ανισότητα Cramer-Rao το ίσον επιτυγχάνεται εαν-ν

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\underset{\sim}{X}, \theta) \leq k(\theta, n)[U(\underset{\sim}{X}) - g(\theta)] \quad (*)$$

για τον αμερόληπτο εκτιμητή $U(\underset{\sim}{X})$ της $g(\theta)$

Έτσι αν υπάρχει εκτιμητής $U(\underset{\sim}{X})$ της $g(\theta)$ τ.ω.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta) = k(\theta,n)[U(\underset{\sim}{X}) - g(\theta)]$$ τότε ο $U(\underset{\sim}{X})$ είναι ΑΟΕΔ

και $Var_\theta(U(\underset{\sim}{X})) = \left|\frac{g'(\theta)}{k(\theta,n)}\right|$

Αν η $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)$ αναλύεται στη μορφή της (*)

τότε $U(\underset{\sim}{X})$ αμερόλ. αφού $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta)\right] = 0$

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από πληθυσμό με κατανομή Poisson(θ)

Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{X},\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-n\theta + \sum_{i=1}^{n}x_i\log\theta - \sum_{i=1}^{n}\log x_i!\right] =$$

$$= -n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\theta\right) = \frac{n}{\theta}(\bar{X}-\theta)$$

Άρα ο $\bar{X}$ είναι ~~ααε~~ ΑΟΕΔ εκτιμητής.

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $B(1,p)$

Να βρεθεί ΑΟΕΔ της p.

$$\frac{\partial}{\partial p}\log p(\underset{\sim}{X},\theta) = \frac{\partial}{\partial p}\log\prod_{i=1}^{n}p(x_i,p) = \frac{\partial}{\partial p}\log\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{\partial}{\partial p} \log p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{i=1}^n x_i \log p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right)\log(1-p)\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \cancel{p\sum_{i=1}^n x_i} - np + \cancel{p\sum_{i=1}^n x_i}}{p(1-p)}$$

$$= \frac{n}{p(1-p)}\left(\frac{1}{n}\sum x_i - p\right) = \frac{n}{p(1-p)}(\bar{X} - p)$$

Άρα $\bar{X}$ ΑΟΕΔ της p.

<u>Παράδειγμα:</u> (Κανονική κατανομή $N(\mu,\theta)$, μ γνωστό)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό $N(\mu,\theta)$ με μέση τιμή μ γνωστή. Να βρεθεί ΑΟΕΔ εκτιμητής της άγνωστης διακύμανσης θ, $\theta>0$

$g(\theta)=\theta$ ν.β. ο ΑΟΕΔ και με την ανισότητα Cramer-Rao και με την παρατήρηση.

<u>Ανισότητα Cramer-Rao:</u>

$$f(x,\theta) = (1/\sqrt{2\pi\theta})\, e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2}$$

$$\log f(x,\theta) = -\frac{1}{2}\log 2\pi\theta - \frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{(x-\mu)^2}{\theta^3}$$

$$I_X(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \log f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right] = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}E(X-\mu)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}E(X-E(X))^2 = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}Var(X) = -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\theta = \frac{1}{2\theta^2}$$

$$K\Phi_{C-R} = \frac{[g'(\theta)]^2}{n I_X(\theta)} = \frac{1}{n(1/2\theta^2)} = \frac{2\theta^2}{n}$$

Επίσης θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διακύμανση χρησιμοποιώντας ως εκτιμητή τη δειγματική διακύμανση $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

όμως μ. γνωστό άρα ξεκινάμε με τη σ.σ.

$$S_*^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$E(S_*^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{n}{n-1}\theta$$

Προφανώς ο S_*^2 δεν είναι αμερόληπτος της θ όμως ο $\frac{n-1}{n}S_*^2$ είναι, αφού $E\left(\frac{n-1}{n}S_*^2\right) = \theta$

Έτσι θεωρούμε τον εκτιμητή $T = \frac{n-1}{n}S_*^2 = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ Θα είναι ΑΟΕΔ αν $Var(T) = K\Phi_{C-R}$.

$$Var(T) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) \overset{\text{Χιανεξ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i-\mu)^2.$$

αλλά $X_i \sim N(\mu,\theta) \Rightarrow \frac{X_i-\mu}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_i-\mu)^2}{\theta} \sim N^2(0,1) = X_1^2$

$$Var\left(\frac{(X_i-\mu)^2}{\theta}\right) = Var(X_1^2) = 2 \Rightarrow Var(X_i-\mu)^2 = 2\theta^2$$

$$Var(T) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}2\theta^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n2\theta^2 = \frac{2\theta^2}{n} = K\Phi_{C-R}$$

Άρα T ΑΟΕΔ της θ.

Βάση της παρατήρησης:

$$f(\underset{\sim}{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\,e^{-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2}=\frac{1}{(2\pi\theta)^{n/2}}\,e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log f(\underset{\sim}{x},\theta)=-\frac{n}{2}\log\theta-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{\partial \log f(\underset{\sim}{x},\theta)}{\partial\theta}=\frac{-n}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=$$

$$=\frac{1}{2\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{n}{2\theta}\cdot 2\theta^2\right]=$$

$$=\frac{n}{2\theta^2}\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2-\theta\right]$$ είναι της μορφής:

$$\frac{\partial \log f(\underset{\sim}{x},\theta)}{\partial\theta}=k(\theta,n)\left[u(\underset{\sim}{x})-g(\theta)\right]$$

Άρα $T(\underset{\sim}{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ ΑΟΕΔ της θ.

Αποτελεσματικός εκτιμητής:

Ο εκτιμητής $u(\underset{\sim}{x})$ της $g(\theta)$ λέγεται αποτελεσματικός αν ο $u(\underset{\sim}{x})$ είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\theta)$

Σχετική Αποτελεσματικότητα:

Έστω $u(\underset{\sim}{x})$ αποτελεσματικός εκτιμητής της $g(\theta)$. Έστω $T(\underset{\sim}{x})$ αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$, με $Var_\theta(T(\underset{\sim}{x}))<\infty$
Η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{x})$ σε σχέση με τον εκτιμητή $u(\underset{\sim}{x})$ ορίζεται από το πηλίκο

$$\frac{Var_\theta(u(\underset{\sim}{x}))}{Var_\theta(T(\underset{\sim}{x}))}$$

Παρατήρηση:

$$0 \leq \frac{Var(U(\underline{X}))}{Var(T(\underline{X}))} \leq 1$$ αποτελεί μέτρο της ποιότητας

του εκτιμητή $T(\underline{X})$. Τιμές κοντά στο 1 δείχνουν ότι ο εκτιμητής $T(\underline{X})$ έχει διακύμανση κοντά στο ΚΦ C-R

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ X_1, X_2, X_3 από κατανομή Poisson(θ).

Θεωρούμε τον εκτιμητή $T = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$ της θ, $\theta > 0$

Να προσδιοριστεί η σχετική αποτελεσματικότητα του εκτιμητή T ως προς τον αποτελεσματικό εκτιμητή U της θ.

Σε προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ, είναι ο $\bar{X}$. Επομένως ο αποτελεσματικός εκτιμητής της θ είναι $U = \bar{X}$

$$Var U = Var \bar{X} = \frac{1}{3^2} \cdot 3 Var X_i = \frac{1}{3}\theta$$

$$Var T = \frac{1}{6^2}(Var X_1 + 4 Var X_2 + 9 Var X_3) = \frac{1}{36} 14\theta = \frac{7\theta}{18}$$

$$\frac{Var U}{Var T} = \frac{\theta/3}{7\theta/18} = \frac{6}{7} = 0,8571 = 85,71\%$$

Διαισθητικά μιλώντας ο εκτιμητής T περιέχει περίπου το 85% της αποτελεσματικότητας του U και υστερεί κατά 15% αυτής.

Εκθετική Οικογένεια Κατανομών:

Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΜΕΟΚ).

Η μονοπαραμετρική (η παράμετρος θ μονοδιάστατη) οικογένεια πυκνοτήτων $f(x,\theta)$ λέγεται ότι ανήκει στην ΜΕΟΚ αν μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$f(x,\theta) = c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)}$$

, $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ με A ανεξάρτητο της παραμέτρου $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και c, h, Q, T κατάλληλες συναρτήσεις των θ και x

Παραδείγματα ΜΕΟΚ:

$Εκθ(\theta)$, $Poisson(\theta)$, $N(\theta,1)$, $N(\theta,\sigma^2)$ σ^2 γνωστό, $N(\mu,\sigma^2)$ μ γνωστό, $B(n,p)$.

Παρατήρηση:

Αν $X_1,..,X_n$ είναι τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή της ΜΕΟΚ:

$f(x,\theta) = c(\theta)\cdot h(x)\exp(Q(\theta)T(x))$

τότε $f(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = c^n(\theta)\left[\prod_{i=1}^{n} h(x_i)\right]\exp\left[Q(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\right]$

$\Rightarrow f(\underset{\sim}{x},\theta) = c^*(\theta)h^*(\underset{\sim}{x})\exp(Q(\theta)T^*(\underset{\sim}{x}))$

με $c^*(\theta) = c^n(\theta)$. $h^*(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i)$ $T^*(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)$

αν $g(\theta) = E(T^*(\underset{\sim}{x}))$ τότε

i) $T^*(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)$ αποτελεί εκτιμητής της $g(\theta)$.

ii) $aT^*(x)+b$ αποτελεί εκτιμητής της $ag(\theta)+b$.
με a, b σταθ. συναρτ. της $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και $a \neq 0$

Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΠΕΟΚ)

Η πολυπαραμετρική (η παράμετρος $\underset{\sim}{\theta}$ είναι κ-διάστατη) οικογένεια κατανομή $f(x,\theta)$ λέγεται ότι ανήκει στην ΠΕΟΚ αν μπορεί να εκφραστεί στην μορφή:

$$f(x,\underset{\sim}{\theta}) = c(\underset{\sim}{\theta})h(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\theta)T_j(x)\right\}, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R} \text{ με}$$

A ανεξ. της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_k) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ και c, h, Q_j και T_j, $j=1,\dots,k$ κατάλληλες συναρτήσεις των $\underset{\sim}{\theta}$ κ x

Παραδείγματα:

$N(\mu,\sigma^2)$, $B(a,b)$, a,b άγνωστα

Εκθετική Οικογένεια κατανομών και Συνθήκες Κανονικότητας της Ανισότητας Cramer-Rao

Τα μέλη της εκθετικής οικογένειας κατανομών ικανοποιούν τις συνθήκες κανονικότητας της ανισότητας των Cramer-Rao. Έτσι για τα μέλη της οικογένειας αυτής μπορούν να αναζητηθούν ΑΟΕΔ εκτιμητές των παραμέτρων τους με τη χρήση της ανισότητας Cramer-Rao